Erinnerung:
Sei $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[|t|]$ lokale Parametrisierung von f und $C = V(f)$ mit $f(x(t), y(t)) = 0$. Eine weitere Kurve ist $D = V(g)$. $P = 0 \in C \cap D$, dann ist die Schnittmultiplizität

$$I(C, D; 0) = Ord_t g(x(t), y(t)).$$

Beispiel 0.1. *$C = V(Y^2 - X^3), D = V(Y^2 - 2X^3)$ mit Parametrisierung $x(t) = t^2, y(t) = t^3$. Dann ist*

$$g(x(t), y(t)) = t^6 - 2t^6 = -t^6 \Longrightarrow Ord_0 g(x(t), y(t)) = 6.$$

Beispiel 0.2. *Sei $C = V(X^2 - Y^3)$ und $D = V(X^3 - Y^2)$ mit Parametrisierung $x(t) = t^3, y(t) = t^2$. Dann:*

$$g(x(t), y(t)) = t^9 - t^4 \Longrightarrow Ord_0 g(x(t), y(t)) = 4$$

1 Projektive Kurven

Nach dem Satz von Bézout gilt:

$$\sum_{p \in C \cap D} I(C, D; p) \leq Grad(C) \cdot Grad(D)$$

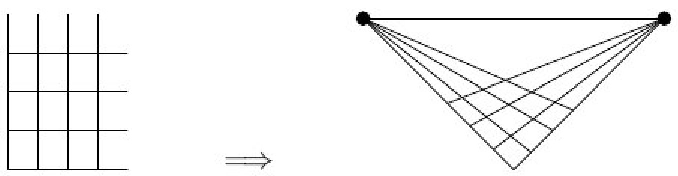
Gleichheit bei diesem Ausdruck tritt auf, falls C und D keine gemeinsame asymptotische Richtungen besitzen.

1.1 Ziel

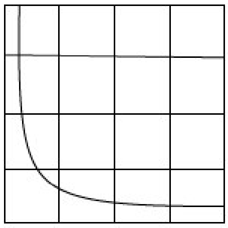
Das Ziel dieses Kapitels ist es, das Defizit der Affinen Ebene aufzuheben. Dazu erweitern wir die affine Ebene $\mathbb{A}^2$ zu der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$.

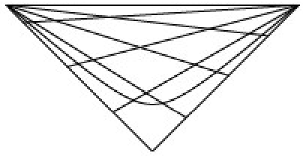
$$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

Betrachte Folgendes Bild. Im $\mathbb{A}^2$ bilden parallele Gerade ein Gitter ohne einen Schnittpunkt. Wählt man hingegen die Perspektivische Darstellung, erhält man zwei Fluchtpunkte und eine unendlich ferne Gerade l_∞.



Für eine Hyperbel erhält man folgende perspektivische Darstellung.





1.2 Projektive Ebene

Definition 1.1. *Sei* $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ *ein Punkt,* $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
$(x : y : z)$ *ist die Ursprungsgerade durch den Punkt* (x, y, z) *und*

$$\mathbb{P}^2 := \{(x : y : z) | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

die Menge der Ursprungsgeraden.

Bemerkung 1.2.

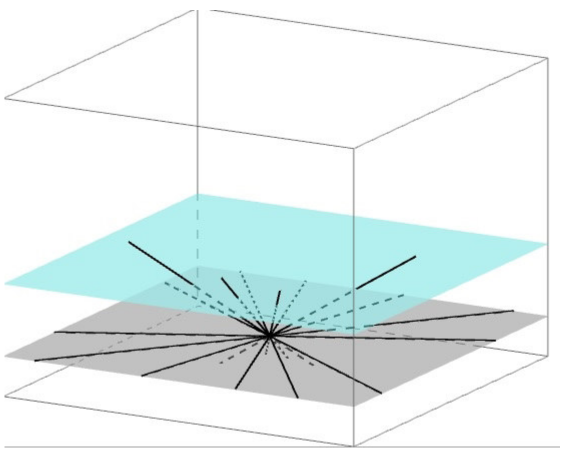
- *Die Bedingung* $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ *ist notwendig, damit eine Gerade festgelegt wird.*
- $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$
- *Für einen beliebigen k-Vektorraum V definiert man allgemein* $\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\})/_{V \sim \lambda V}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$. *Diese Menge entspricht der Menge der Ursprungsgeraden in V.*

Betrachte die Abbildungen:

$$\begin{array}{rlrl} \mathbb{A}^2 & \hookrightarrow \mathbb{P}^2 & \quad \mathbb{P}^1 & \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x : y : 1) & \quad (x : y) & \mapsto (x : y : 0) \end{array}$$

Wir haben die Ursprungsgeraden also in zwei Gruppen, $z = 1$ und $z = 0$, unterteilt und finden

$$\boxed{\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{P}^1}.$$



Wir sehen, dass die Geraden in $\mathbb{P}^2$ den Ursprungsebenen in $\mathbb{A}^3$ entsprechen. Die Gruppe $GL_3(\mathbb{C})$ der invertierbaren 3×3 Matrizen operiert auf $\mathbb{P}^2$. Auf $\mathbb{A}^3$ operiert:

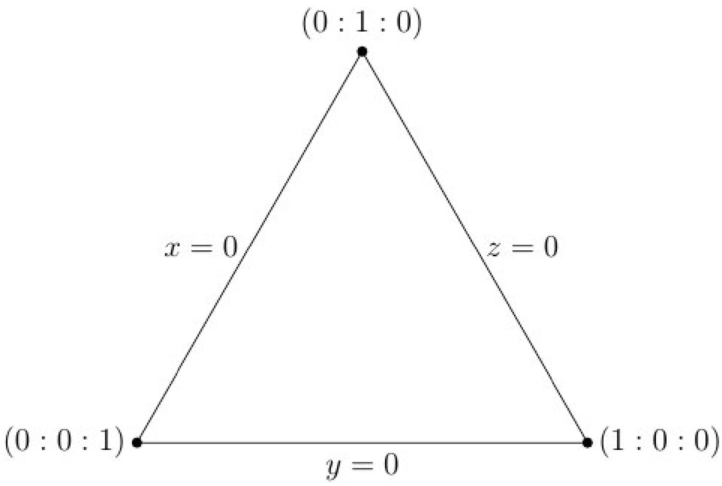
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bemerke für eine Vielfaches der Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Also $(x : y : z) \longmapsto (\lambda x : \lambda y : \lambda z) = (x : y : z)$. Effektiv wirkt die Faktorgruppe $PGL_3(\mathbb{C}) = GL_3(\mathbb{C})_{/\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}^*}$- diese wirkt auf $\mathbb{P}^2$. Außerdem ist diese Wirkung transitiv, da $(x : y : z) \longmapsto (\lambda x : \lambda y : \lambda z) \longmapsto (\delta\lambda x : \delta\lambda y : \delta\lambda z) = (x : y : z)$.
Wir sehen, dass die ganze Ebene $\mathbb{P}^2$ durch folgende 3 Karten ausgeschöpft werden kann und verwenden folgende grafische Darstellung zur Veranschaulichung der Kurven.

$$\begin{aligned} z \neq 0 : xy - Karte, &\quad \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x, y) \mapsto (x : y : 1) \\ y \neq 0 : xz - Karte, &\quad \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x, z) \mapsto (x : 1 : z) \\ z \neq 0 : yz - Karte, &\quad \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (y, z) \mapsto (1 : y : z) \end{aligned}$$



1.3 Homogene Polynome

Definition 1.3. *$F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ heißt homogen von Grad d, wenn alle Monome von F den gleichen Totalgrad d haben.*

$$F = \sum a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad a_{\alpha\beta\gamma} \neq 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = d$$

Wir schreiben $\mathbb{C}[x,y,z]_d$ *für die Menge der homogenen Polynome von Grad d. Alternativ:*

$$F \in \mathbb{C}[x,y,z]_d \Longleftrightarrow F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x,y,z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Es ist

$$\begin{aligned} x\partial_x x^\alpha y^\beta z^\gamma &= \alpha x^\alpha y^\beta z^\gamma, \\ y\partial_y x^\alpha y^\beta z^\gamma &= \beta x^\alpha y^\beta z^\gamma, \\ z\partial_z x^\alpha y^\beta z^\gamma &= \gamma x^\alpha y^\beta z^\gamma. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) x^\alpha y^\beta z^\gamma = d \cdot x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

Für ein homogenes Polynom $F \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$ *gilt die* Euler Relation*:*

$$\boxed{(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) \cdot F = dF}$$

Definition 1.4. $f \in \mathbb{C}[x,y], \quad f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d, \quad f_k \in \mathbb{C}[x,y]_k.$
Die Homogenisierung von f *ist*

$$f^H := f_0 z^d + f_1 z^{d-1} + \ldots + f_d \quad \in \mathbb{C}[x,y,z]_d.$$

Eine alternative Definition für die Homogenisierung ist: $f^H(x,y,z) = z^d \cdot f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$*. Dies liefert das selbe Ergebnis wie oben, da* $f_k(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = \frac{1}{z^k} f_k(x,y)$*.*

Die Dehomogenisierung von $F \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$ *ist* $F^D(x,y) := F(x,y,1)$*. Offensichtlich gilt:*

$$(f^H)^D = f \quad \textit{aber} \quad (F^D)^H \neq F \quad \textit{allgemein}$$

Zum Beispiel gilt für $F = z, \quad F^D = 1$ *und* $(f^D)^H = 1$*.*
Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} F &= z^k \tilde{F}, \quad z \nmid \tilde{F} \\ F^D &= (\tilde{F})^D \\ (F^D)^H &= ((\tilde{F})^D)^H = \tilde{F} \\ \Rightarrow & z^k (F^D)^H = F \end{aligned}$$

1.4 Projektive Kurven

F ist homogen von Grad d, dann ist $V(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 | F(x,y,z) = 0\}$. Diese Fläche hat die Besonderheit

$$(x,y,z) \in V(F) \Rightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in V(F),$$

da $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x,y,z)$. Ist $(x,y,z) \neq (0,0,0) \in V(F)$, so liegt die ganze Ursprungsgerade $(x:y:z)$ in $V(F)$.

Definition 1.5. $F \in \mathbb{C}[x,y,z]_d, (F \neq 0)$

- $\mathcal{V}(F) = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2 | F(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ *heißt projektive Kurve definiert durch F.*
- $l_\infty = \mathcal{V}(z)$ *ist die Unendlich ferne Gerade.*

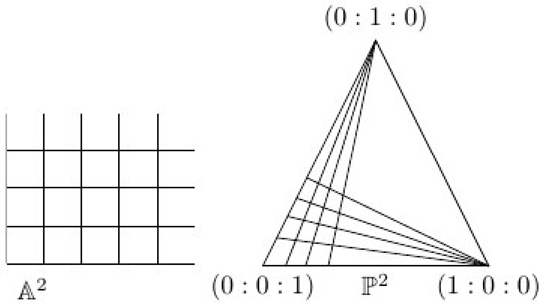
Definition 1.6. *Sei* $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ *eine affine algebraische Kurve.*
$\mathcal{C} = \mathcal{V}(f^H) \subset \mathbb{P}^2$ *heißt projektiver Abschluss von* C

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup \\ C & \hookrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

Die Schnittpunkte von $\mathcal{C}$ *mit* l_∞, *d.h.* $\mathcal{C} \cap l_\infty$ *nennen wir die unendliche Punkte von* C.

Bemerkung 1.7. *Der Schnitt* $\mathcal{C} \cap l_\infty$ *besteht aus den Punkten* $(x:y:z) \in \mathbb{P}^2$, *für die gilt* $F(x,y,z) = 0$ *d.h.* $F(x,y,0) = 0$.
F *hat die Form* $F = f_0 z^d + \cdots + f_{d-1} z + f_d = f^H, F(x,y,0) = f_d(x,y)$.
$(x:y) \in \mathbb{P}^1$ *ist eine Asymptotische Richtung von* $C \Leftrightarrow f_d(x,y) = 0$

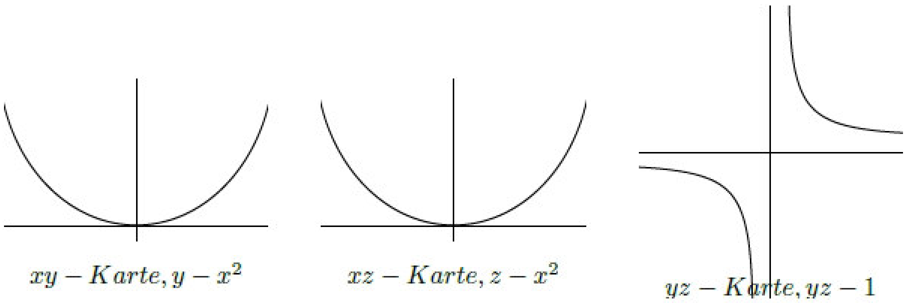
Beispiel 1.8. $f = x - C$ *übertragen wir in die perspektivische Darstellung*
$F = f^H - cz, \mathcal{V}(F) \cap l_\infty : \quad x - cz \overset{z=0}{=} 0, (0:1:0),$
$G = g^H - cz, \mathcal{V}(G) \cap l_\infty : \quad y - cz \overset{z=0}{=} 0, (1:0:0)$



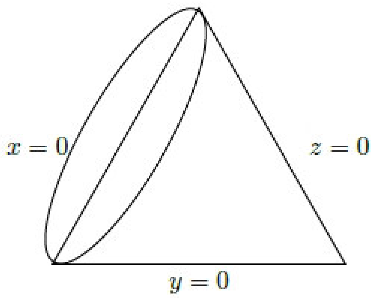
Im Allgemeinen untersucht man $\mathcal{C} = V(F)$ in den drei Karten:

$$\begin{array}{ll} xy - Karte, & F(x,y,1) \\ xz - Karte, & F(x,1,z) \\ yz - Karte, & F(1,y,z) \end{array}$$

Beispiel 1.9. $f = y - x^2, \quad F = f^H = zy - x^2$



In der perspektivischen Darstellung erhalten wir somit:



Daran sehen wir, dass l_∞ *eine Tangente an* $\mathcal{C}$ *in* $(0:0:1)$ *ist.*